Prova Scritta di Analisi Matematica 27 giugno 2017

Cognome e nome (in stampatello) e numero di matricola:..

(1) [5 punti] Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{2}|x| + \sin(x)$$

e si risponda (nell'ordine che si preferisce) ai seguenti quesiti.

i. Calcolare la derivata f' di f e il dominio di f'.

ii. Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

iii. Tracciare un grafico di f che contenga tutte queste informazioni.

$f(\pi) = f(-\pi) = \frac{\pi}{2}$; $f(0) = 0$ $\quad f$ è continua in $[-\pi, \pi]$.

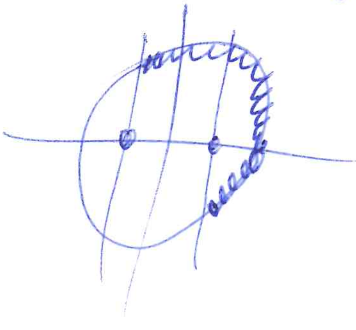
$\forall x \neq 0: \quad f'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(x) + \cos(x)$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2} + 1 \neq -\frac{1}{2} + 1 = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$:

Dominio $(f') = [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

Monotonia. $\quad f'(x) \geq 0 \iff \cos(x) \geq -\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(x)$

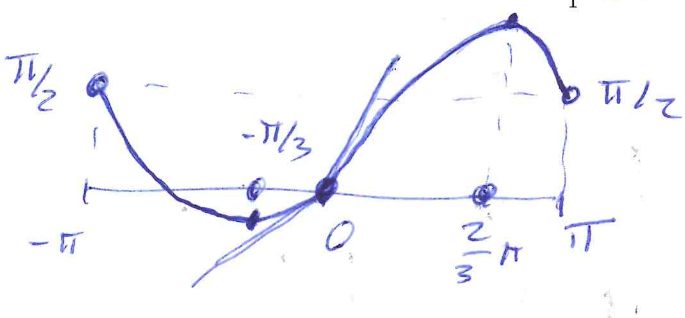
$\iff \begin{cases} \cos(x) \geq -\frac{1}{2} \\ 0 < x \leq \pi \end{cases}$ o $\begin{cases} \cos(x) \geq \frac{1}{2} \\ -\pi \leq x < 0 \end{cases}$



$\iff 0 < x \leq \frac{2}{3}\pi$ o $-\frac{\pi}{3} \leq x < 0$

f cresce su $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$ $\quad -\pi \quad -\frac{\pi}{3} \quad 0 \quad \frac{2}{3}\pi \quad \pi$

decresce su $[-\pi, -\pi/3]$ e $[2/3\,\pi, \pi]$.



(2) [5 punti risposta esatta, −1 punti se errata] Sia $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Quale delle seguenti conclusioni è necessariamente vera?

a) Esiste x in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tale che $f(x) = \tan(x)$.

b) f è crescente su $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

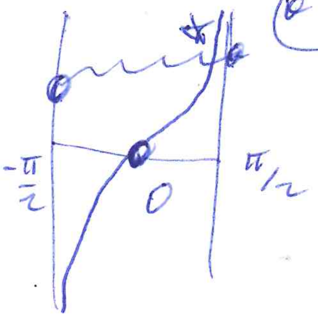
c) Esiste x in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $f(x) = -x$.

d) $f'(x) \geq 0$ per almeno un x in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

(3) [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor in $x = 0$ al secondo ordine della funzione:

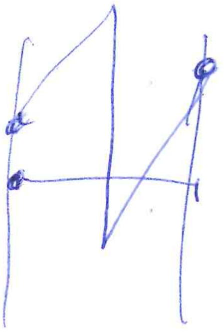
$$f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}} - e.$$

(2)



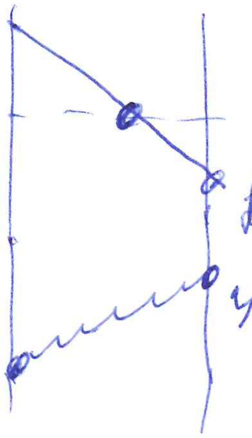
$y = tg(x)$

a : V



b : F

c : F



d : non sappiamo se f è derivabile
F

(3) $e^{\frac{1+x}{1-x}} - e =$

$= e \cdot \left\{ e^{\frac{1+x}{1-x} - 1} - 1 \right\} = e \left\{ e^{\frac{2x}{1-x}} - 1 \right\} =$

$= e \cdot \left\{ 1 + \frac{2x}{1-x} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2 + o(x^2) - 1 \right\} =$

$= e \cdot \left\{ 1 + 2x(1 + x + o(x)) + \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) - 1 \right\}$

$= e \cdot \left\{ 2x + 2x^2 + 2x^2 + o(x^2) \right\} = 2ex + 4ex^2 + o(x^2)$

(4) [5 punti] Si calcoli l'integrale:

$$I = \int_3^8 \frac{\log(x)}{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$I = \int_2^3 \log(y^2-1) \frac{2y\,dy}{y} = 2\int_2^3 \left[\log(y-1)+\log(y+1)\right] dy$$

$x+1 = y^2$

$y = \sqrt{x+1} \,\Big|\, \sqrt{9} = 3, \ \sqrt{4} = 2$

$2y\,dy = dx$

$$= 2\cdot\left\{\left[(y-1)\log(y-1)\right]_2^3 - \int_2^3 dy + \left[(y+1)\log(y+1)\right]_2^3 - \int_2^3 dy\right\}$$

$$= 2\cdot\left\{2\log 2 - 1 + 4\log 4 - 3\log 3 - 1\right\}$$

$$= 2\left\{10\log 2 - 3\log 3 - 2\right\}.$$

(5) [5 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, e si definisca $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$h(x) = \int_x^{x^2} f(t^2)dt.$$

Calcolare $h'(x)$.

$$h'(x) = f(x^4)\,2x - f(x^2)$$

(6) [5 punti] Calcolare

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1+x}{1-x}} - e}{x}.$$

$$\frac{e^{\frac{1+x}{1-x}} - e}{x} = \frac{2ex + o(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2e$$